Mouvement de rotation uniformément accéléré
Mesure de Moment d'Inertie – Théorème de Huyghens

1. OBJET DE LA MANIPULATION.

- Utilisation d'un accéléromètre en liaison blue-tooth pour la mesure des composantes de vitesse et accélération d'un mouvement de rotation uniformément accéléré.

- Détermination d'un moment d'inertie par mesure d'accélération et illustration du théorème de Huyghens.

2. PRINCIPE DE LA MANIPULATION.

2.1. Dispositif expérimental

2.1.1. Montage mécanique

Une tige rigide (Figure 1), mobile autour d'un axe central vertical Δ , est solidaire d'un tambour de rayon R, autour duquel est enroulé un fil inextensible de masse négligeable qui s'enroule sans glisser. Deux masses cylindriques M_1 et M_2 et deux anneaux A_1 et A_2 peuvent être positionné(e)s le long de la tige à des distances d_{Mi} et d_{Ai} de Δ.
Une masse m est accrochée à l'extrémité libre du fil. La chute de la masse m provoque un mouvement de rotation uniformément accéléré du système (tige + tambour + masses) autour de l'axe vertical Δ.

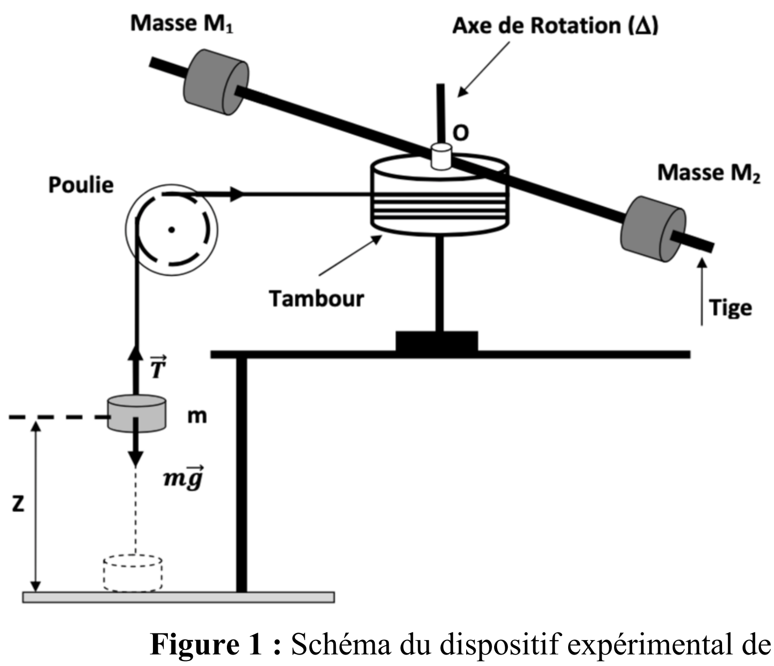


Figure 1 : Schéma du dispositif expérimental de mesure

2.1.2. Dispositif de mesure

L'enregistrement des composantes de position angulaire, vitesse angulaire et accélération de la tige est réalisé par l'intermédiaire d'un accéléromètre (Figure 2) placé sur la tige. L'accéléromètre est relié en liaison bluetooth à un programme d'acquisition (accéléromètre) disponible sur votre bureau.
L'accéléromètre possède son référentiel propre (O,x,y,z). On le positionnera avec son axe Oy parallèle à l'axe de la tige et son axe Oz vertical.

Figure 2 : Accéléromètre utilisé pour les mesures (gauche) et installation sur la tige (droite)

<u>Attention :</u> Les appellations et unités des différentes variables délivrées par le programme du constructeur ne sont pas cohérentes avec les dénominations usuelles :

- X, Y et Z (données en degrés dans le programme d'acquisition) sont en fait les positions angulaires θ_x, θ_y et θ_z autour des trois axes principaux de l'accéléromètre, Ox, Oy et Oz respectivement.

Si la rotation s'effectue dans le plan horizontal, les composantes selon X et Y seront nulles et la composante selon Z donnera la position angulaire θ.

- Vx, Vy et Vz (données en °/s dans le programme d'acquisition) sont en fait les vitesses angulaires $\dot{\theta}_x$, $\dot{\theta}_y$ et $\dot{\theta}_z$ autour des trois axes précédents.

Pour une rotation dans un plan horizontal de même, Vz donne $\dot{\theta}$, les autres composantes sont nulles.

- aX, aY et aZ (données en unité « g » dans le programme d'acquisition) sont les composantes d'accélération selon les trois axes. Il s'agit des composantes tangentielle, normale et verticale de l'accélération de l'accéléromètre. Elles devront être multipliées par la valeur de g.

Dans le plan horizontal (plan de la rotation), on se rappelle l'expression de l'accélération du mouvement circulaire dans le repère de Frenet:
$\vec{a} = r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} = r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_t} + r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_n}$. Si on positionne l'accéléromètre comme indiqué, aX donnera sa composante tangentielle et aY sa composante normale. Plus précisément, en notant r_{acc} la distance du capteur de l'accéléromètre à l'axe de rotation:
aX = $r_{acc}\,\ddot{\theta}$ et aY = $r_{acc}\,\dot{\theta}^2$.

2.2. Théorie

On considère la masse m, soumise à son propre poids et à la tension du fil $\vec{T}$; en lui appliquant le théorème fondamental de la dynamique, on obtient :

$m\,\vec{g} + \vec{T} = m\,\vec{a}$ en projetant sur l'axe Oz et en notant a la norme du vecteur accélération ($\vec{a} = -a\,\overrightarrow{e_z}$) : - mg + T = -ma

Soit T = m(g-a) Eq. 1

On se place dans le plan de la rotation et on considère le système mobile (tige + tambour + accéléromètre).
En appliquant le théorème du moment cinétique à l'ensemble:

$$\sum \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{\mathcal{F}_{ext}}) = I_\Delta \ddot{\theta}$$

En négligeant les frottements, le moment résultant se réduit à celui de la tension du fil s'appliquant au tambour (Figure 3). Dans un système d'axes lié au support:

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{T}) \cdot \overrightarrow{e_z} = (-R\overrightarrow{e_x} \wedge -T\overrightarrow{e_y}) \cdot \overrightarrow{e_z} = (RT\overrightarrow{e_z}) \cdot \overrightarrow{e_z} = RT = I_\Delta \ddot{\theta} \qquad \text{Eq. 2}$$

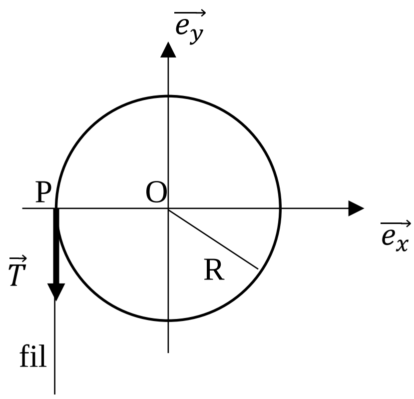


Figure 3 : le tambour vu de dessus

Ce qui, en combinant les Equations 1 et 2, donne :

$$mR(g-a) = I_\Delta \ddot{\theta}$$

Or l'accélération a de la masse est celle de tout point du fil et donc celle d'un point P de la périphérie du tambour; c'est l'accélération tangentielle des points périphériques du tambour: a(masse) = a_T(périphérie tambour) $= R\ddot{\theta}$ où R est le rayon du tambour.

En remplaçant a dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$mR(g - R\ddot{\theta}) = I_\Delta \ddot{\theta} \qquad \text{Eq. 3.1}$$

qui donne pour I_Δ: $I_\Delta = mR\,(\frac{g}{\ddot{\theta}} - R)$ Eq. 3.2

I_Δ peut donc être obtenu par la mesure de $\ddot{\theta}$.

$\ddot{\theta}$ est déterminé uniquement par la géométrie du système, la valeur de m et la valeur de g bien-sûr. Ces grandeurs étant constantes, le mouvement est uniformément accéléré.
L'intégration de $\ddot{\theta}$ permet alors d'obtenir $\dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}(0)$. Le système sera mis en mouvement sans vitesse initiale, donc $\dot{\theta} = \ddot{\theta}t$.
Une nouvelle intégration donne: $\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \theta(0)$.

2.3. Mesures de $\ddot{\theta}$

1. Nous avons indiqué que aX permettait de visualiser $r_{acc}\,\ddot{\theta}$. Il faudra connaître r_{acc}.
2. Sur aY, on visualise $r_{acc}\,\dot{\theta}^2$; or $\dot{\theta} = \ddot{\theta}t$ donc aY = $r_{acc}\,\ddot{\theta}^2 t^2$; on peut modéliser la courbe par une parabole et obtenir $r_{acc}\,\ddot{\theta}^2$
3. V_z donne $\dot{\theta} = \ddot{\theta}t$, droite de pente $\ddot{\theta}$.
4. Z donne $\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \theta_0$; parabole que l'on peut modéliser pour obtenir $\ddot{\theta}$.
5. Sur Z également: on peut mesurer la variation de θ entre deux instants t_1 et t_2; pour mesurer Δθ il suffit de compter le nombre N de tours effectués par la tige, l'angle de rotation s'en déduit par Δθ = 2π N;

$\Delta\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}\,\Delta(t^2)$ donnera : $\ddot{\theta} = \frac{4\pi N}{{t_2}^2 - {t_1}^2}$

3. MANIPULATION.

3.1. Mesures préalables

Mesurer les 4 masses d'accrochage, les masses cylindriques M_1, M_2, A_1, A_2, leur rayon intérieur et extérieur et leur hauteur. Calculer les moyennes pour M_1, M_2 et pour A_1, A_2.

Mesurer également la distance entre les deux masses M_1 et M_2 lorsqu'elles sont fixées au niveau des trous les plus éloignés. En déduire la distance entre le centre de ces masses et l'axe Δ, qui sera appelée d_2.

3.2. Prise en main du logiciel

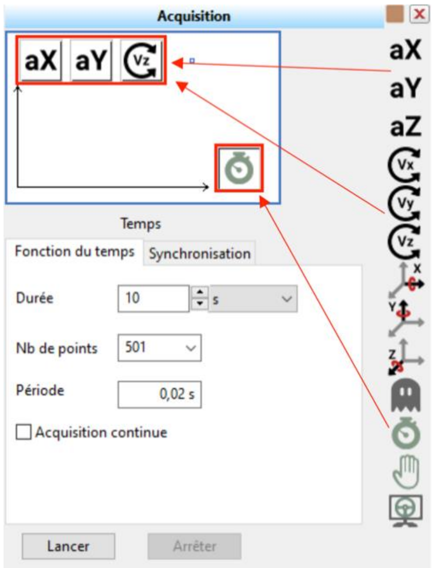
<u>Alignement et réglages préalables.</u>

- Fixer M_1 et M_2 sur la tige mobile, leur centre au niveau des premiers trous (les plus près de l'axe).
- Vérifier que sans masse m accrochée, l'ensemble tige + masses est en équilibre indifférent autour de Oz, sinon agissez sur les vis de réglage de l'horizontalité.

- Le fil est enroulé sur la piste inférieure du tambour, la poulie de renvoi est montée sur l'axe inférieur, de façon à ce que le fil soit horizontal lorsqu'une masse lui est accrochée.

Accrocher une masse de 10g en maintenant la tige; vérifier que le fil est parallèle à l'axe du support.

- Allumer l'accéléromètre et le placer sur la tige mobile, en le collant à une des masses M. Insérer le dongle bluetooth dans un des ports USB. Ouvrir l'exécutable accéléromètre (accéléromètre.exe).
- Glisser l'icône temps en abscisse et les icônes d'accélération aX, aY, aZ en ordonnées. Dans la fenêtre qui apparaît, choisir l'onglet « Réglages » puis appuyer sur « Régler » (la valeur de g). Attendre l'apparition du bouton « ok ». La valeur de aZ doit osciller autour de la valeur 1 (unité g), à $\pm 3.10^{-3}$ g près, aX et aY doivent être nulles. Dans l'onglet Affichage de aY régler ± 8 (unités g) et la durée d'acquisition à 5s (icône temps).



- Appuyer sur « Lancer » (l'acquisition) et lâcher aussitôt la tige. Veiller à l'arrêter juste avant que la masse m ne touche le sol.
- Observer les courbes. Voir comment il est possible d'obtenir $\ddot{\theta}$ à l'aide d'une "modélisation mathématique".
- Recommencer la même expérience en mettant les ordonnées Vx, Vy, Vz. Dans l'onglet Affichage choisir -2000 et +2000°/s. Observer les résultats. Que pourra-t-on mesurer et comment?
- Lâcher la masse une nouvelle fois avec les ordonnées X, Y, Z. Quelles mesures pourra-t-on faire et comment?

Attention aux unités. Il y a dans certains cas des conversions à faire.

3.3. Mesure de I_1

Choisir les ordonnées aY, Vz, Z et faire les mesures en accrochant 2 masses différentes: 20g, 50g, et en répétant les mesures 2 fois.

Utiliser un tableur pour les calculs de l'accélération angulaire selon les 4 méthodes possibles.

Suggestion de présentation de tableur :

I1 MM au centre			AY		VZ		Z		Z		
données:			modélisation		modélisation		modélisation				
racc (m)			multiplier a par g								
	formule à appliquer pour trouver $\ddot{\theta}$ (expression littérale)		formule		formule		formule		formule		
g (m/s2)	masse (g)	9,761							4piN/(t2²-t1²)	N	2
		coefficient a	0,0641125		104,296		165,555			t1	1,36
		coefficient a	0,0635		105,068		166,421			t2	3,359
		moyenne des a				°/s²		°/s²		N	2
			multiplié par g							t1	1,37
				mrad²/s4						t2	3,362
									moyenne		
	$\ddot{\theta}$ rad/s²)			rad/s²		rad/s²		rad/s²		rad/s²	
	masse (g)	20,346							4piN/(t2²-t1²)	N	2
		coefficient a	0,0641125		104,296		165,555	°/s²		t1	1,36
		coefficient a	0,0635		105,068		166,421			t2	3,359
		moyenne des a				°/s²				N	2
			multiplié par g							t1	1,36
				mrad²/s4						t2	3,359
									moyenne		
	$\ddot{\theta}$ (rad/s²)			rad/s²		rad/s²		rad/s²		rad/s²	

Commentaires….

En choisissant une des quatre méthodes pour déterminer l'accélération angulaire, calculer I_1 par l'équation 3.2.

3.4. Calibration à l'aide du théorème de Huyghens

3.4.1. Principe:

Le moment d'inertie par rapport à Δ se calcule par:

$$I_\Delta = I_0 + I_{Gz}(M_1, M_2) + (M_1 + M_2)d^2$$

où I_0 est le moment d'inertie de l'ensemble tige- tambour- accéléromètre,

I_{Gz} est le moment d'inertie des masses M_1 et M_2 par rapport à Gz, un axe parallèle à Δ passant par leur centre, d est la distance entre Gz et Δ.

Dans notre expérience précédente, d sera noté d_1, et le moment d'inertie correspondant I_1.

$$I_1 = I_0 + I_{Gz}(M_1, M_2) + (M_1 + M_2){d_1}^2$$

Si nous rajoutons les masses A_1 et A_2 aux extrémités, à une distance d_2 de Δ, le moment d'inertie sera:

$$I_2 = I_1 + I_{Gz}(A_1, A_2) + (A_1 + A_2){d_2}^2$$

La différence $I_2 - I_1 = I_{Gz}(A_1, A_2) + (A_1 + A_2){d_2}^2$ peut être calculée précisément grâce à vos mesures dimensionnelles, et mesurée grâce à une 2° expérience en plaçant seulement les masses A_1 et A_2 à la distance d_2 de Δ.

On calculera alors le coefficient de calibration $\alpha = \frac{(I_2 - I_1)_{\text{théorique}}}{(I_2 - I_1)_{\text{mesuré}}}$

On montre (calcul annexe) qu'en divisant les accélérations angulaires mesurées par ce facteur correctif α, on peut rendre les résultats expérimentaux conformes à la théorie.

3.4.2. Calcul de $(I_2 - I_1)_{\text{théorique}}$

On donne pour un cylindre de masse M : $I_{Gz} = \frac{1}{12} MH^2 + \frac{1}{4} M({R_{int}}^2 + {R_{ext}}^2)$

3.4.3. 2° expérience

Placer A_1 et A_2 au niveau des trous les plus éloignés (distance d_2).

Mesurer l'accélération pour deux ou trois masses, avec deux mesures pour chaque masse.

Le tableur précédent pourra être allégé, en ne gardant que le canal choisi et en rajoutant le calcul de I_2.

I2							
données:	masse (g)		20		50		100
R rayon tambour	coefficient a	104,296		104,296		104,296	
	coefficient a	105,068		105,068		105,068	
g (m/s2)	moyenne des a		°/s²		°/s²		°/s²
	$\ddot{\theta}$ rad/s²)		rad/s²		rad/s²		rad/s²
Calcul de I2	formule						

3.4.4. Calcul de $(I_2 - I_1)_{mesuré}$, et du coefficient de calibration $\alpha = \frac{(I_2-I_1)_{théorique}}{(I_2-I_1)_{mesuré}}$

Les accélérations mesurées devront être divisées par ce coefficient.

Vérifier qu'alors, on retrouve que $(I_2 - I_1)_{mesuré} = (I_2 - I_1)_{théorique}$

3.5. Mesure d'un moment d'inertie

Déplacer les masses M_1 et M_2 aux extrémités.

Pour 3 masses (20, 50, 100 g), mesurer $\ddot{\theta}$. Il faudra, dans le tableur, rajouter une ligne pour la calibration par le coefficient α déterminé dans le paragraphe précédent.

Calculer I_3.

3.6. Estimation de la valeur du champ de pesanteur

On peut, avec les mesures précédentes, avoir une évaluation approximative de g.

En effet l'équation 3.1 peut également s'écrire: $\ddot{\theta} = \frac{mRg}{mR^2+I_\Delta}$ ou encore : $\frac{1}{\ddot{\theta}} = \frac{I_\Delta}{gR}\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{R}{g}$

Le graphe de $\frac{1}{\ddot{\theta}}$ en fonction de $\frac{1}{m}$ est une droite de pente $\frac{I_\Delta}{gR}$, d'où l'on peut déduire la valeur de g.

__**Calcul théorique calibration:**__

Pour une masse m, $I_1 = mR\left(\frac{g}{\ddot{\theta}_1} - R\right)$ et $I_2 = mR\left(\frac{g}{\ddot{\theta}_2} - R\right)$

$$I_2 - I_1 = mRg\left(\frac{1}{\ddot{\theta}_2} - \frac{1}{\ddot{\theta}_1}\right) = (I_2 - I_1)_{mesuré}$$

En posant $\alpha = \frac{(I_2-I_1)_{théorique}}{(I_2-I_1)_{mesuré}}$, l'équation ci-dessus s'écrit:

$$mRg\left(\frac{1}{\ddot{\theta}_2} - \frac{1}{\ddot{\theta}_1}\right) = \frac{(I_2-I_1)_{théorique}}{\alpha}$$

ou encore: $(I_2 - I_1)_{théorique} = mRg\left(\frac{\alpha}{\ddot{\theta}_2} - \frac{\alpha}{\ddot{\theta}_1}\right)$